

LNF - 65/32
8 Settembre 1965.

G. Baldacchini e V. Montelatici: MISURE DI IMPEDENZA SUPERFICIALE A 23 Gcps A BASSE TEMPERATURE. -

(Nota interna: n. 289)

Nota interna: n° 289
8 Settembre 1965

G. Baldacchini^(x) e V. Montelatici: MISURE DI IMPEDENZA SUPERFICIALE A 23 Gcps A BASSE TEMPERATURE.

1. INTRODUZIONE.

Nello studio della spettroscopia a radiofrequenza si rivelano molto spesso gli assorbimenti di energia elettromagnetica in un circuito oscillante. Il campione è posto in un campo elettromagnetico oscillante di frequenza ω ed ampiezza H_1 ad angolo retto con campo statico H_0 : le transizioni di dipolo magnetico tra sottolivelli Zeeman sono indotte in vicinanza della condizione di risonanza:

$$(1) \quad \hbar \omega = g \beta H_0$$

ove g è il fattore di Landè, \hbar la costante ridotta di Planck, e β il magnetone di Bohr. L'effetto di queste transizioni è un assorbimento di energia il quale è collegato alla parte immaginaria χ'' della suscettività dinamica del campione⁽¹⁾.

In uno spettrometro ove il circuito oscillante è in riflessione il minimo segnale rivelabile in condizioni ideali è dato⁽²⁾ dalla formula:

$$(2) \quad \chi''_{\min} = \frac{1}{\pi \eta Q_0} P_i^{-1/2} (F K T \Delta \nu)^{1/2}$$

ove K è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta, $\Delta \nu$ la larghezza di banda del sistema rivelatore, F la figura di rumore del sistema

(x) - Studente della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

di rivelazione ed amplificazione, P_i la potenza incidente, γ il fattore di riempimento dipendente dalla geometria del circuito oscillante e dal volume del campione, ed è ≤ 1 , e Q_0 il fattore di merito non carico del risonatore. Sulla potenza incidente P_i è imposto un limite superiore dovuto alla necessità di non saturare la transizione, il fattore $(F K T \Delta \nu)^{1/2}$ dipende dal sistema di rivelazione (detector + amplificatore) e nel presente scritto non indagheremo sul suo andamento. L'unica grandezza che può essere variata per aumentare la sensibilità dello spettrometro è il fattore Q_0 . E' necessario, inoltre, sottolineare che la formula (2) è scritta sotto la condizione che Q_0 sia eguale al fattore di merito Q_{ex} , dovuto all'accoppiamento ed alle eventuali perdite del circuito oscillante; vedremo, nel seguito come sia possibile realizzare queste condizioni per rivelare il segnale minimo dovuto agli ioni paramagnetici(x). Dovendo compiere così uno studio sperimentale sulle cavità di utilità nella spettrometria non si è mancato di fare delle misure sul fenomeno della superconduttività; perciò nell'articolo compaiono alcuni dati sperimentali su di un risonatore di stagno. Altri autori^(3, 4) hanno preso in considerazione risonatori analoghi.

2. DEFINIZIONE DEL Q E METODO DI MISURA.

Una cavità risonante è essenzialmente un oggetto per immagazzinare energia, ed è un circuito oscillante analogo a quello ben noto in bassa frequenza anche se l'aspetto fisico è diverso. Qualsiasi superficie chiusa conduttrice è capace di sostenere campi elettromagnetici e la forma e le dimensioni determinano il tipo e la frequenza dell'onda stazionaria. Il calcolo della frequenza e della distribuzione dei campi all'interno della superficie chiusa è un problema di valori al contorno noto. Ciascun modo

(x) - Il numero di ioni rivelabili è legato alla suscettività⁽¹⁾ dalla relazione:

$$\chi'' = \frac{\pi}{2} \chi_0 \gamma H f(\omega)$$

ove $\chi_0 = N \mu^2 / 3KT$ è la suscettività statica, $\mu = g \beta \sqrt{S(S+1)}$ è il momento magnetico ed $f(\omega)$ la forma della riga di assorbimento normalizzata all'unità; se con $\Delta \omega / 2$ si intende la semilarghezza a metà ampiezza è $\Delta \omega f(\omega) \simeq 1$ e quindi

$$\chi'' = \pi g^2 \beta^2 S(S+1) \frac{H}{\Delta H} \frac{N}{3KT}$$

questo risultato unito alla (2) dà per il numero di ioni minimo rivelabile:

$$N \left(\frac{\text{ioni}}{\text{cm}^3} \right) = \frac{\Delta H}{H} \frac{3KT}{g^2 \beta^2 S(S+1)} \times \frac{1}{\gamma Q_0 \pi^2} P_i^{-1/2} (F K T \Delta \nu)^{1/2}$$

di oscillazione ha una sua particolare distribuzione dei campi che determinano le correnti alla superficie del conduttore. Queste correnti dissipano energia in forma di calore e danno luogo allo smorzamento dell'onda stazionaria la cui entità dipende dalla configurazione del campo oltre che dalla resistività del materiale.

Analogamente al caso meccanico il fattore di merito Q può essere definito^(5, 6) nel seguente modo: supponiamo che la cavità risonante sia eccitata da un generatore il quale al tempo $t = 0$ viene cortocircuitato, allora il campo elettromagnetico nella cavità decade nel tempo a causa delle dissipazioni sulle pareti e di altre eventuali perdite, per cui detta W_0 la energia presente inizialmente si ha:

$$(3) \quad W(t) = W_0 \exp\left(-\frac{\omega t}{Q}\right)$$

e quindi:

$$(4) \quad Q = \frac{\omega_0 W}{-\frac{\partial W}{\partial t}} = \omega_0 \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{potenza dissipata}}$$

Si vede dalla (3) che la grandezza adimensionale Q^{-1} dà il grado di smorzamento del risuonatore; più alto è il Q tanto più piccolo è lo smorzamento. Inoltre la relazione (4) ci suggerisce di spezzare in parti la potenza dissipata definendo così dei fattori di merito a seconda delle modalità delle perdite di energia.

$$(5) \quad Q_0 \text{ (non carico)} = \omega_0 \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{potenza perduta causa la resistività del materiale.}}$$

$$(6) \quad Q_{\text{ex}} \text{ (esterno)} = \omega_0 \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{potenza perduta per causa esterna}}$$

$$(7) \quad Q_L \text{ (carico)} = \omega_0 \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{potenza perduta totale}}$$

Da queste definizioni e dalla (4) segue immediatamente che:

$$(8) \quad \frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ex}}}$$

Con le (5), (6) e (7) è ora possibile legare i vari fattori di merito a grandezze realmente rivelabili nel circuito prescelto per la misura.

Il circuito equivalente a costanti concentrate (v. fig. 1) di una cavità (a) accoppiata con la sorgente (b) riferito al secondario del trasformatore è mostrato in (c), dove sono state trascurate^(7, 8) le componenti reattive:

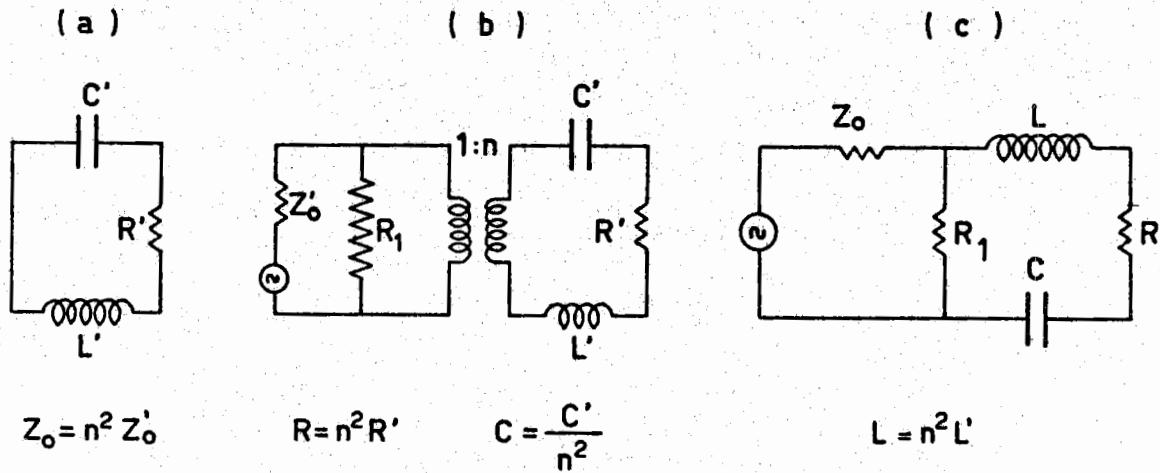


FIG. 1

La resistenza R_1 congloba le eventuali perdite⁽⁷⁾ e dà luogo ad un coefficiente di riflessione Γ_1 pari a:

$$(9) \quad \Gamma_1 = \frac{R_1 - Z_o}{R_1 + Z_o}$$

inoltre indicando con Z l'impedenza della serie L, R, C , (x) si possono ricavare dal circuito equivalente i coefficienti di riflessione alla risonanza Γ_o e fuori risonanza Γ :

(x) - L'impedenza del circuito oscillante è:

$$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$$

e tenendo conto che $Q_o = \omega_o L/R$ e nel caso in cui $\omega \simeq \omega_o$ si ha:

$$Z \simeq R + j Q_o R \frac{\Delta \omega}{\omega_o}$$

con

$$\Delta \omega = 2(\omega - \omega_o)$$

$$(10) \quad \Gamma_o = \frac{\frac{R R_1}{R+R_1} - Z_o}{\frac{R R_1}{R+R_1} + Z_o} \quad (11) \quad \Gamma = \frac{\frac{R_1 Z}{R_1+Z} - Z_o}{\frac{R_1 Z}{R_1+Z} + Z_o}$$

Eseguendo semplici passaggi algebrici (v. appendice n. 1) si trova infine che:

$$(12) \quad Q_L = \alpha \frac{\omega}{\Delta \omega}, \quad \alpha = \left[\frac{|\Gamma|^2 - |\Gamma_o|^2}{|\Gamma_1|^2 - |\Gamma|^2} \right]^{1/2}$$

con

$$\Delta \omega = 2 (\omega - \omega_o)$$

Quindi Q_{ex} e Q_o possono essere espressi in funzione di Q_L e dei coefficienti Γ_o e Γ_1 in due diversi modi a seconda che $Z_o/R = \beta \geq 1$

$$(13) \quad \frac{Q_o}{Q_L} = \begin{matrix} (\beta > 1) \\ \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_o|} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} (\beta < 1) \\ = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 + |\Gamma_o|} \end{matrix}$$

$$(14) \quad \frac{Q_{ex}}{Q_L} = \begin{matrix} \frac{1 + |\Gamma_1|}{|\Gamma_1| + |\Gamma_o|} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \frac{1 + |\Gamma_1|}{|\Gamma_1| - |\Gamma_o|} \end{matrix}$$

Quando $\beta > 1$ la cavità si dice sovraccoppiata (o. c.); se $\beta < 1$ sottoaccoppiata (u. c.); molto interessante è il caso $\beta = 1$ (accoppiamento critico) in cui tutta la potenza incidente sulla cavità è assorbita.

3. APPARATO SPERIMENTALE.

a) - Come abbiamo accennato nella introduzione lo scopo di questo lavoro è la realizzazione di una cavità risonante ad alto Q atta ad essere utilizzata in uno spettrometro. Una delle sue caratteristiche è che il campione da studiare deve essere immerso, oltre che in un campo H_o costante, in campo magnetico oscillante; in realtà il campo elettromagnetico deve essere ruotante, ma si verifica immediatamente che un campo oscillante ortogonale ne è equivalente.

Un modo di oscillazione che corrisponde a questi requisiti è il TE_{011} , (v. fig. 2).

Le dimensioni del risonatore sono state scelte tenendo presente due fatti:

- 1) avere un solo modo di oscillazione in una ampia banda di frequenza.
- 2) riuscire a realizzare il massimo Q teorico.

Le due cose sono contrastanti quindi si è dovuto addivenire ad un

6.

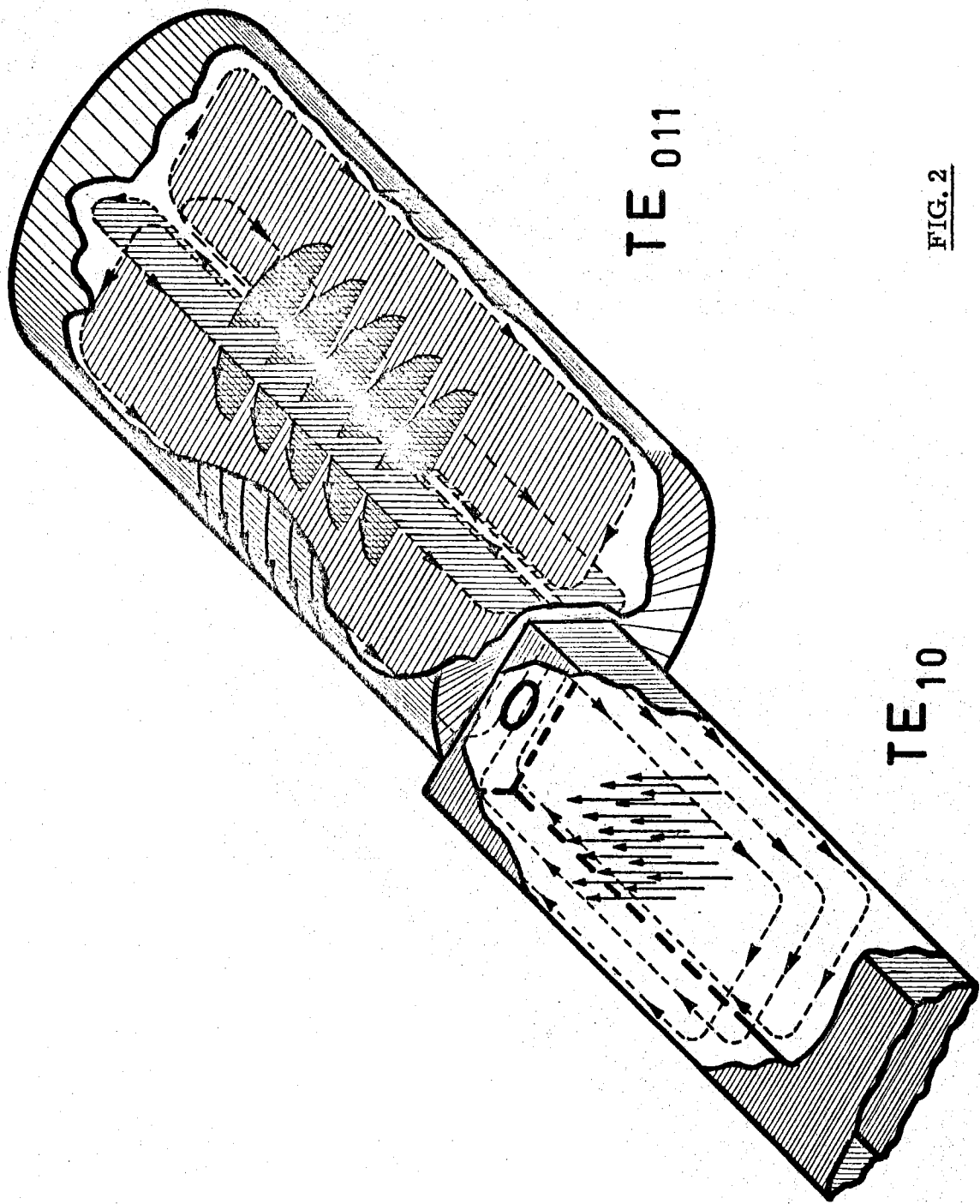


FIG. 2

compromesso. Dalla carta dei modi^(*) si ricava che una zona libera da altre oscillazioni è data (v. fig. 3) da $17 < (10-20 \nu d)^2 < 24$ in cui d è il

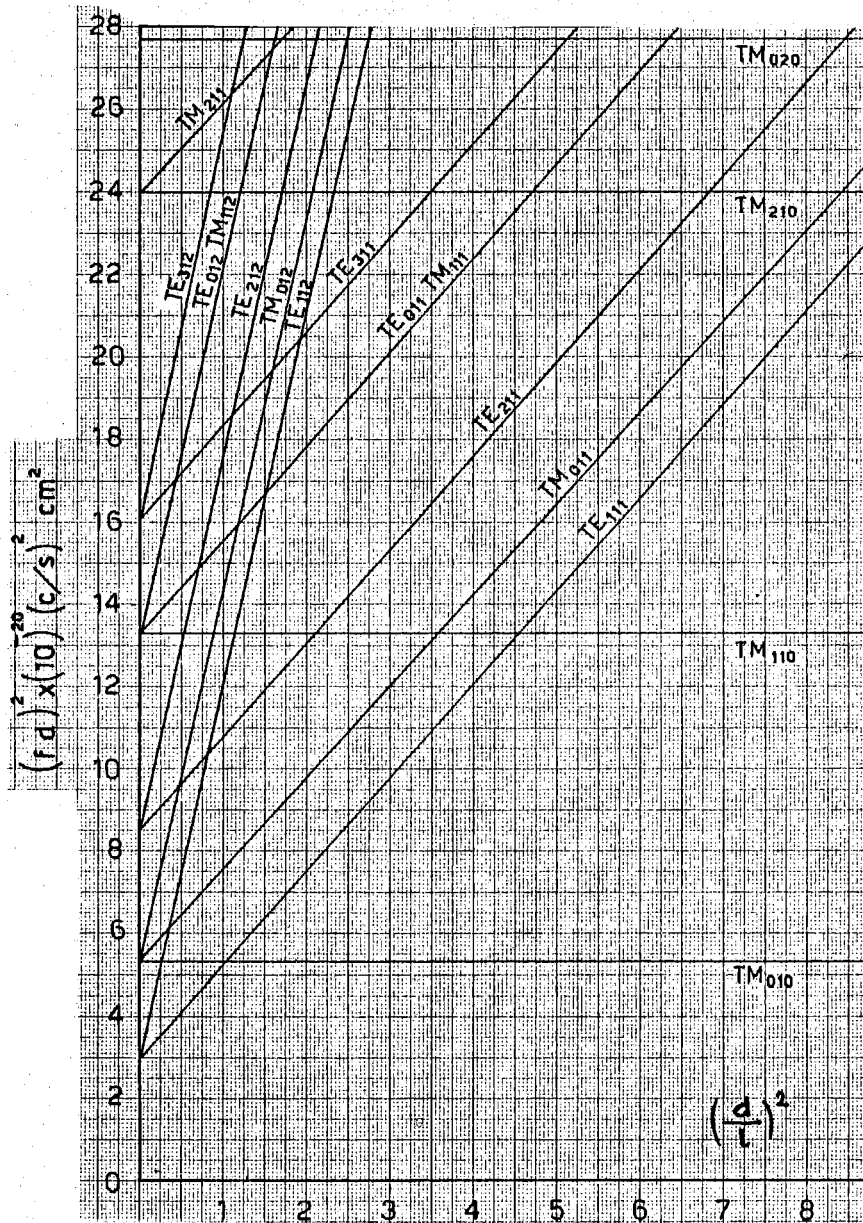


FIG. 3

(*) - Con la carta dei modi si indica il grafico della funzione:

$$(\nu d)^2 = \left(\frac{c}{\pi} K_{1,m}\right)^2 + \left(\frac{c n}{2}\right)^2 \left(\frac{d}{l}\right)^2$$

che lega la frequenza di risonanza di una cavità con le sue dimensioni diametro e lunghezza. La quantità $K_{1,m}$ è la radice m^{esima} della funzione $J_1(K)=0$ per i modi $TE_{1,m}$ e della $J_1'(K)=0$ per i modi $TM_{1,m}$ ove J e J' sono le funzioni di Bessel e le sue derivate prime, ed n è il terzo indice e dà il numero di mezze lunghezze d'onda in cavità^(9, 10).

8.

diametro della cavità; essendo $\nu \cong 23$ Gcps si ha $1.7 < d < 2.2$. Per ragioni tecniche abbiamo scelto il valore di 1.9 cm. Dalla stessa carta dei modi si ricava $1.5 < (d/l)^2 < 4.5$, e quindi essendo $d = 1.9$ cm la lunghezza del cilindro deve poter variare da 0.9 a 1.5 cm.

Dalla fig. 4 si vede però che il rapporto d/l incide sul fattore

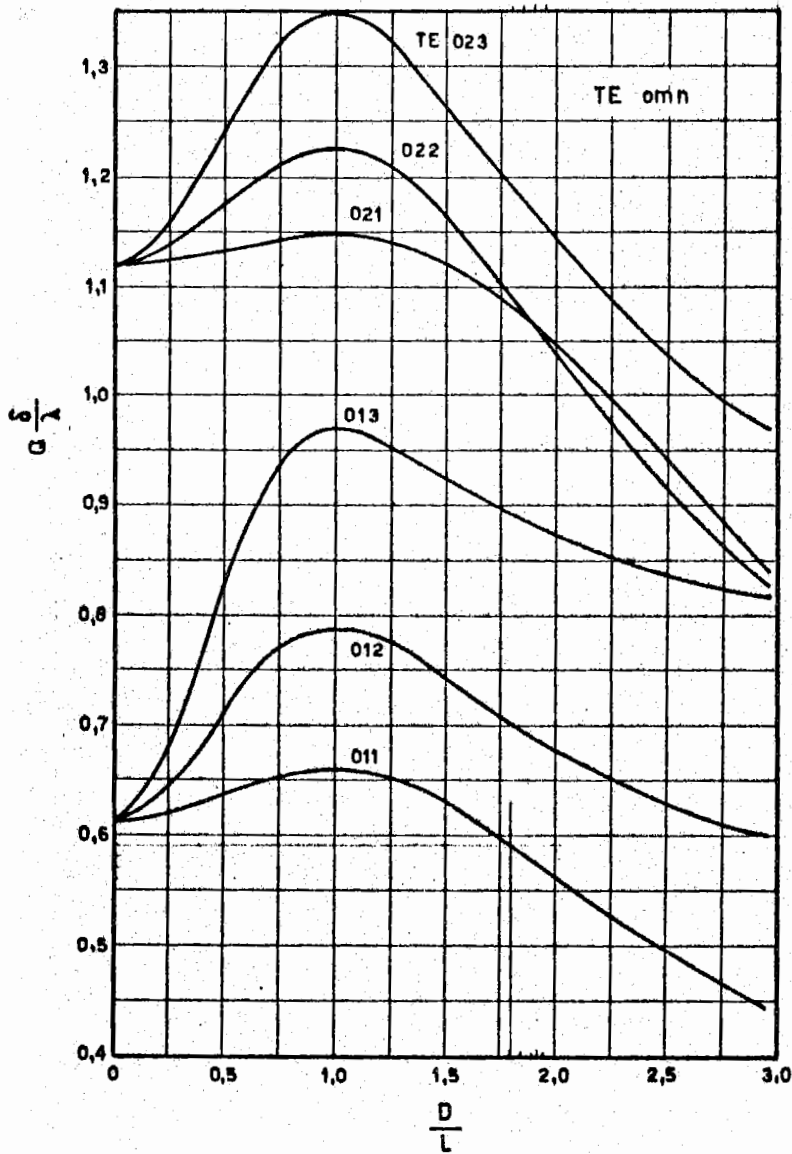


FIG. 4

di merito e con i valori da noi trovati siamo al di fuori della zona di massimo Q . Per fare in modo che anche il valore $d/l = 1$ sia compreso, è sufficiente che la lunghezza del cilindro arrivi sino a 2 cm; in tal modo $0.95 < d/l < 2.1$. Da notare che il modo TM_{111} è sempre degenero con il TE_{011} :

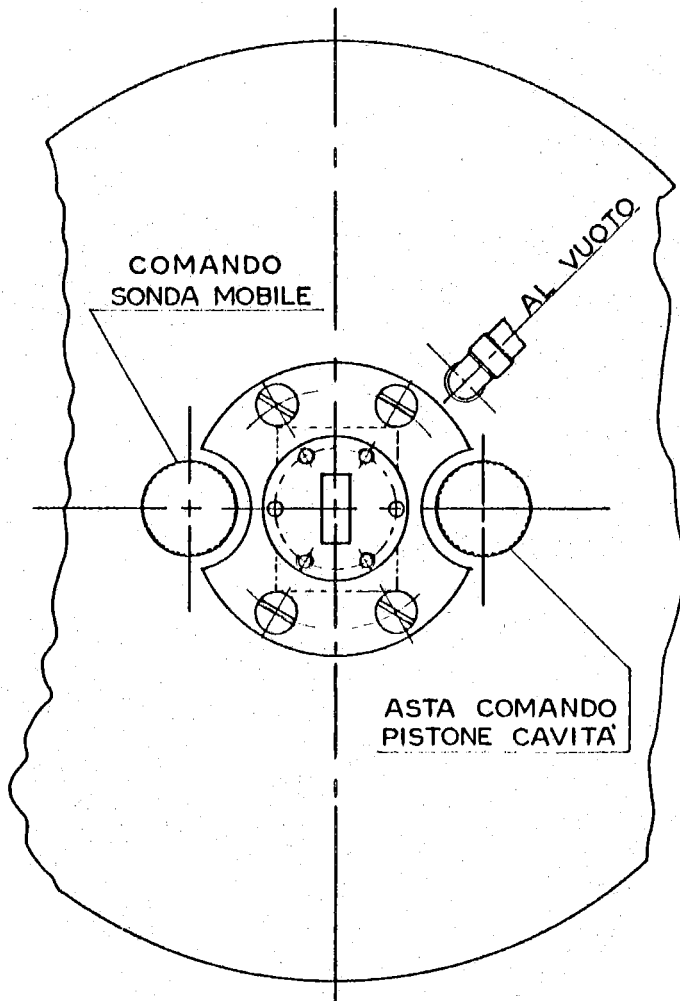
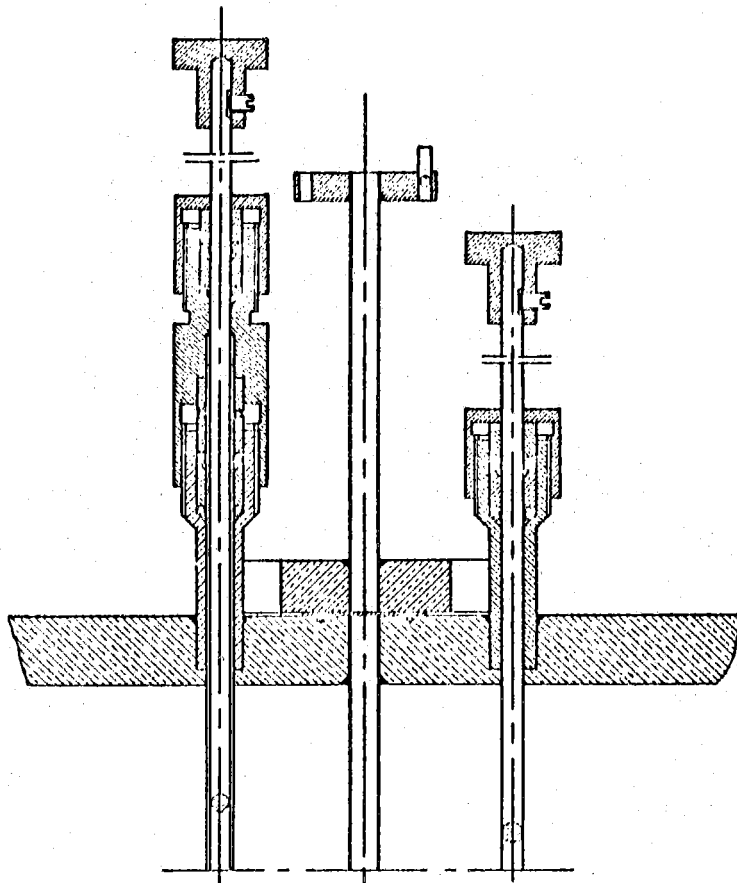


FIG. 5a

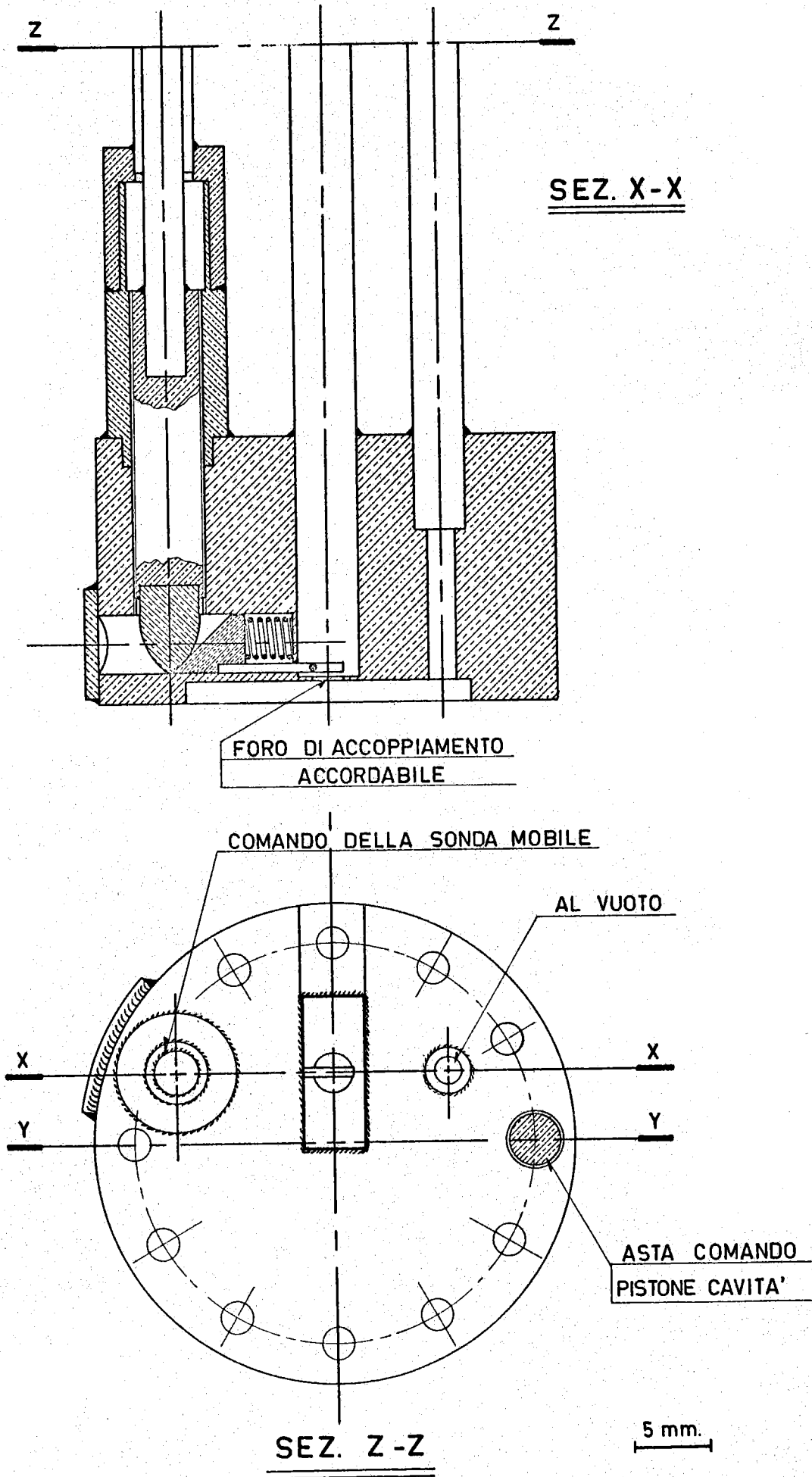
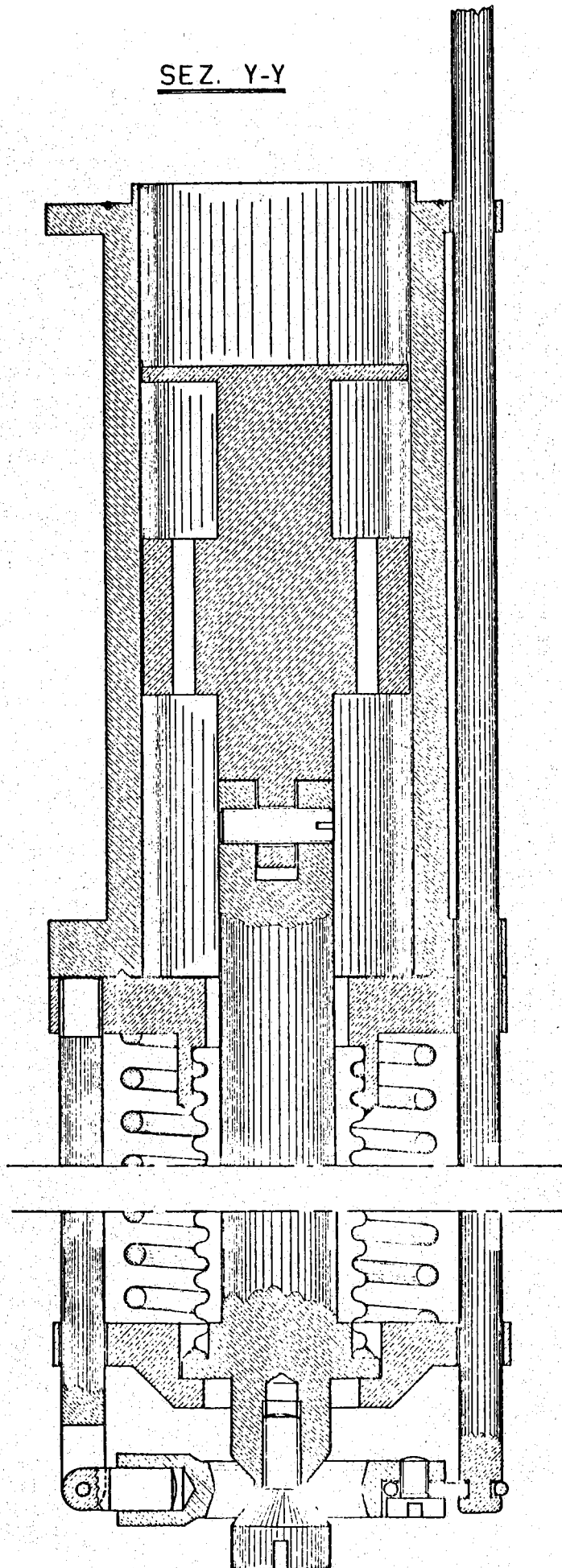


FIG. 5b

SEZ. Y-Y



5 mm.

FIG. 5c

fortunatamente le correnti di superficie dei modi $TM^{(x)}$ si svolgono assialmente e si chiudono sulle basi del cilindro, perciò è sufficiente non metterlo in contatto con la parete laterale per sopprimere il modo indesiderato.

Al fine di eccitare il modo TE_{011} nella cavità è necessario creare un foro sulla parete della cavità. L'accoppiamento sussiste quando vi è continuità tra i campi magnetici nella guida e nella cavità. Ne viene che un corretto accoppiamento per un modo è inadatto per altri, i quali non sono eccitati. Per il modo TE_{011} il foro di accoppiamento deve essere posto ad una distanza dall'asse della cavità pari a $K_m d = 0.476 \text{ cm}$ con $K_m = 0.2403$ (11). Il diametro del foro di accoppiamento ha una grande influenza sul valore del Q che è difficilmente prevedibile con considerazioni teoriche, per questo sono stati fatti fori di diverso diametro: da 0.22 a 0.27 cm; di tutti i valori così ottenuti del fattore di merito si è scelto quello più elevato. Inoltre è ancora possibile mutare l'accoppiamento tramite una impedenza variabile realizzata con una sonda posta subito al di sopra del foro nella guida e che può essere più o meno inserita; in questo modo si riesce ad ottenere l'accoppiamento critico ($\Gamma_o = 0$) e quindi la condizione di massima sensibilità per lo spettrometro. Per i dettagli di costruzione (v. fig. 5).

b) - La fig. 6 mostra lo schema dell'apparato per il raggiungi-

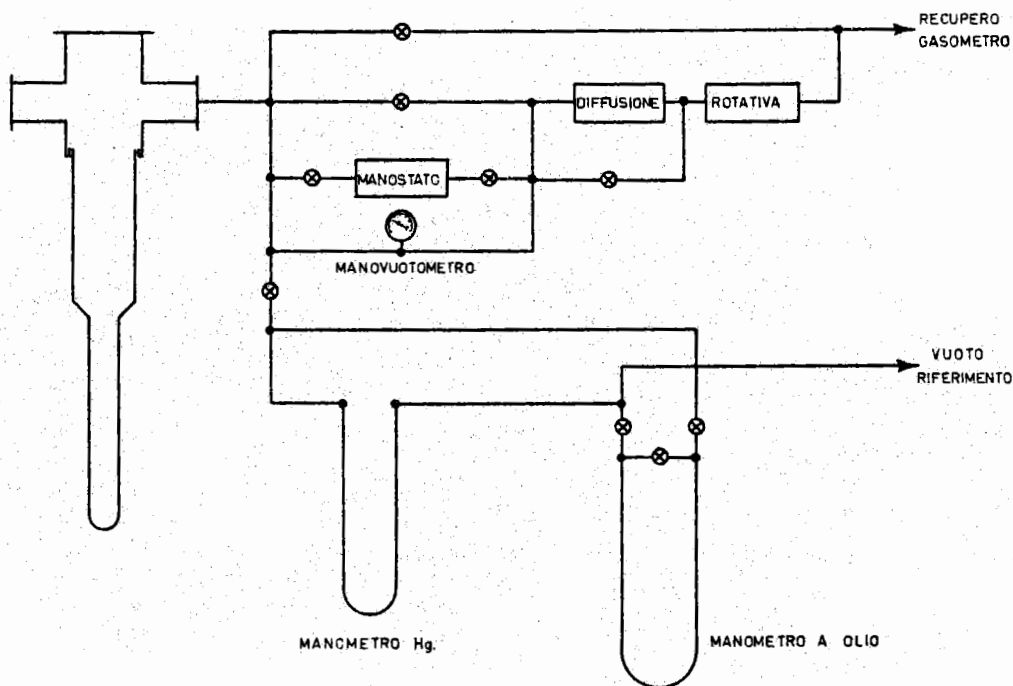


FIG. 6

(x) - Le correnti di superficie sono date dalla relazione $\vec{K} = \vec{n} \wedge \vec{H}$ in cui \vec{n} è il versore della normale alla superficie interna del risonatore e \vec{H} il campo magnetico oscillante.

mento ed il mantenimento delle basse temperature, da 4.2 a 0.9 °K, il quale è costituito da un criostato ad He⁴ in cui è immersa la cavità risonante; essa è collegata al restante circuito a microonde con una guida in acciaio inossidabile di spessore 0.3 mm, al fine di diminuire gli ingressi di calore al bagno. Analogamente tutti gli altri comandi (pistone mobile, sonda, tubo del vuoto) sono realizzati con tubi dello stesso materiale. Inoltre è necessario che all'interno della cavità e della guida, nel bagno di elio, sia mantenuto il vuoto per evitare condensazioni di gas estranei. Per questo, presso il "T magico", la sezione rettangolare della guida è chiusa con una sottile lastrina di mylar e mediante un tubo che pesca nella parte superiore della cavità è operato il vuoto dinamico nel sistema.

La temperatura viene termoregolata da 4.2 a circa 2 °K con un monostato cartesiano, mentre più in basso elettronicamente con il circuito di fig. 7, nel quale la tensione di bilanciamento del ponte, all'uscita dello amplificatore, è confrontata in fase con la tensione di riferimento dell'oscillatore a circa 33 cps. Una diminuzione nel valore della resistenza-termometro (ovvero un aumento della temperatura) si traduce in una diminuzione della corrente nella resistenza-riscaldatore, mentre la pompa aspira sul bagno di elio a velocità costante. Con questi mezzi l'errore commesso sulla lettura della temperatura è minore di 10^{-2} °K. Per la conversione pressione-temperatura è stata usata la "1958 He⁴ scale of temperatures"(12).

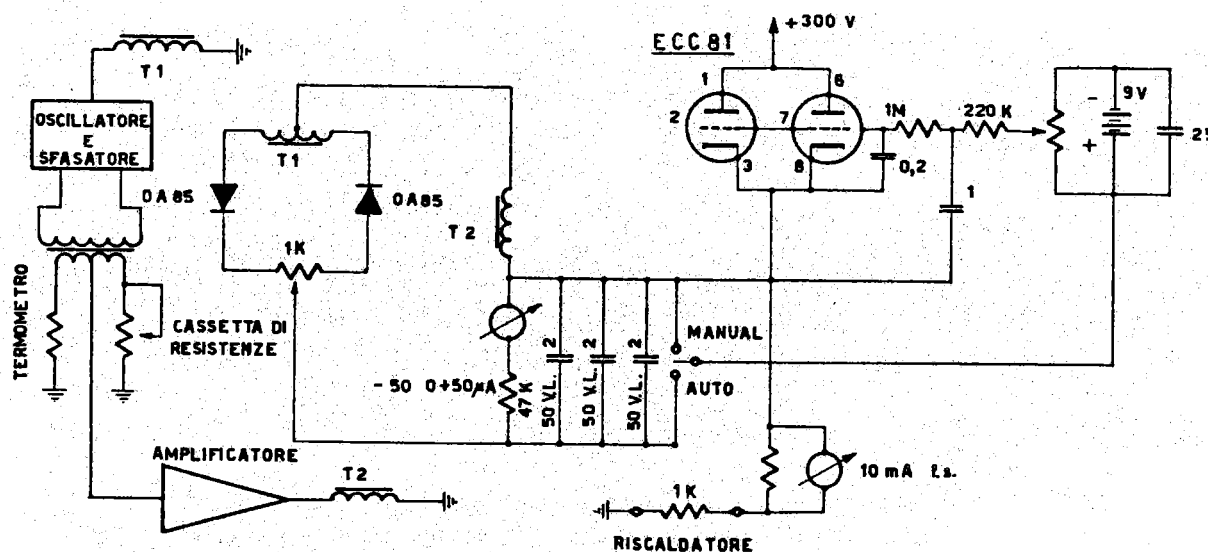


FIG. 7

4. METODO DI MISURA E RISULTATI SPERIMENTALI.

La cavità risonante è collegata al circuito a microonde nel modo mostrato in fig. 8, con riferimento alla quale descriveremo il metodo di misura sperimentale(13, 14).

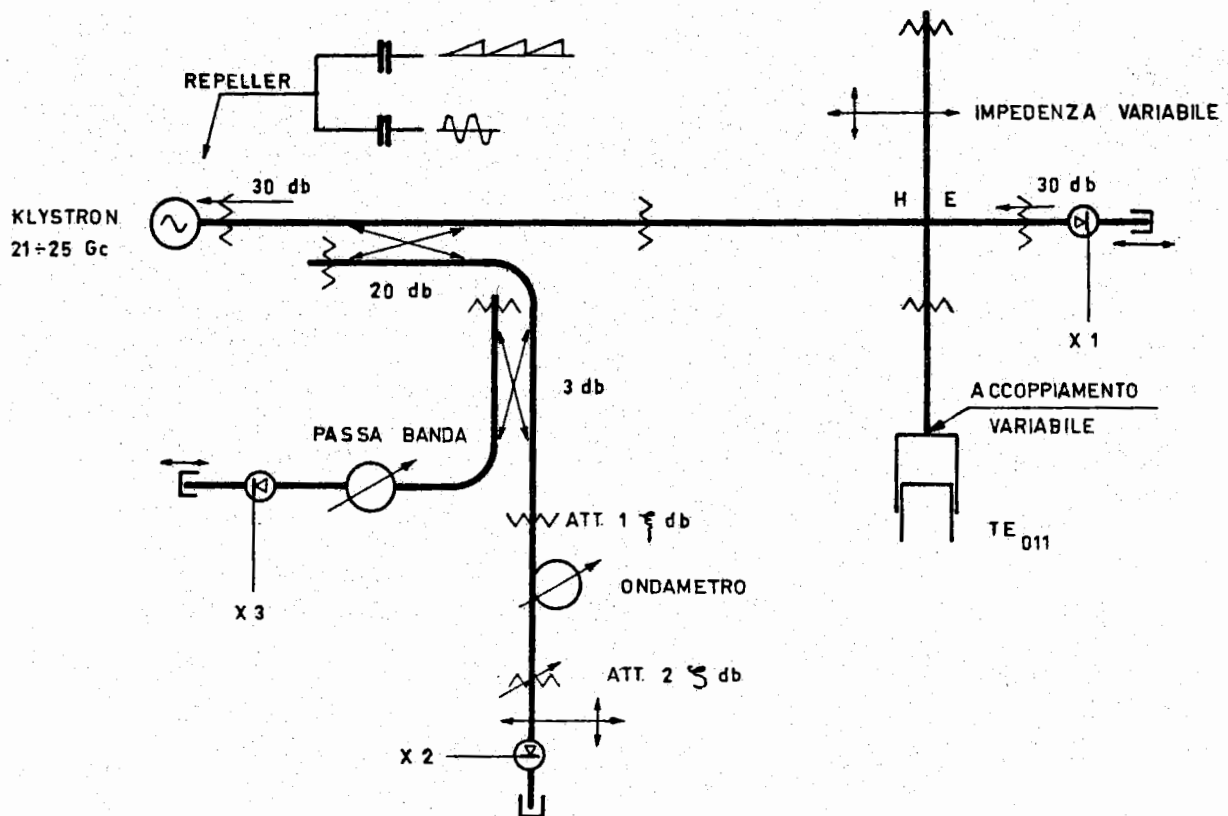


FIG. 8

I segnali provenienti dalla cavità e dal klystron, rivelati dai cristalli X_1 , X_2 rispettivamente, sono visualizzati su di un oscillografo modulando il Klystron con un segnale a dente di sega; quindi i due segnali sono confrontati direttamente. Per la misura di Γ_1 è necessario cortocircuitare la cavità e con l'attenuatore Att. 1 rendere i due segnali uguali, dopodichè si inserisce la cavità fuori risonanza. Se la cavità assorbe energia il segnale da X_1 diminuisce e perciò si inseriscono S_1 db con l'attenuatore Att. 2 in modo da rendere uguali le due risposte; quindi si trasformano i decibel nel corrispondente segnale in tensione tramite la relazione:

$$(15) \quad A(\text{db}) = -20 \text{ Log } A \text{ (Volts)}$$

La misura di Γ_1 è stata eseguita separatamente dalle altre ed in diverse condizioni sperimentali (sono stati provati diversi fori accoppiamento) e tutte le prove hanno dato $\Gamma_1 \cong 1$.

Per la misura di Γ_0 si azzerano i due segnali mediante Att. 1 con la cavità inserita fuori risonanza quindi si entra in risonanza; con l'attenuato tarato Att. 2 si inseriscono S_0 db in modo che il segnale da X_2 coincida in un punto con il massimo assorbimento della cavità e quindi mediante la (15) si risale a Γ_0 . Infine fissato a piacere Γ su due punti simmetrici della curva di risonanza si legge la distanza tra essi in frequenza sull'oscillografo. Ciò è possibile poichè la traccia oscillografica è preventivamente tarata per mezzo di un oscillatore di frequenza nota, dell'ordine

di qualche megaciclo (cioè dell'ordine della larghezza del Q a metà ampiezza), con cui è modulato il klystron; per la taratura si utilizza la cavità passa banda ed il ricevitore X₃ con la quale si ottengono dei marcatori di frequenza^(*).

La frequenza di risonanza della cavità si ricava direttamente mediante l'ondametro tarato con una precisione di circa 10 Mcps.

La fig. 9 mostra le risposte tipiche dei cristalli X₁ (con il picco di assorbimento) e X₂, la fig. 10 l'effetto della sonda, descritta nel precedente paragrafo, e la fig. 11 le bande laterali della cavità passa banda.

Con il metodo descritto sono state eseguite misure su cavità di rame e stagno.

Per la cavità di rame si sono fatte due serie di misure, la prima tabella I su rame commerciale trattato meccanicamente e la seconda, tabella II su rame depositato elettroliticamente.

Tabella I

T °K	Q ₀	ΔQ ₀
293	14500	400
180	17000	800
77	21500	700
4.2	23800	600
2	23800	600
1.2	23800	600

Tabella II

T °K	Q ₀	ΔQ ₀
293	15000	700
180	19500	700
77	29000	1000
4.2	34000	1000
2.5	34000	1000
1.1	34000	1000

Questa deposizione eseguita con elettrodi di rame elettrolitico in soluzione alcalina non è stata del tutto soddisfacente, poichè a distanza di qualche giorno sulle superfici comparivano delle ampie zone scure che incidavano fortemente sul fattore di merito Q₀.

Per lo stagno depositato elettroliticamente, abbiamo ottenuto i

(*) - Si tenga presente che un'onda, $e(t) = \cos(\omega_0 t)$ di frequenza $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$ modulata in frequenza alla pulsazione ω da luogo allo spettro:

$$e(t) = J_0(m) \cos \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos [(\omega_0 + n\omega)t] - \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos [(\omega_0 - n\omega)t]$$

ove m è il grado della modulazione di frequenza⁽¹⁵⁾. J_n la funzione di Bessel di ordine n.

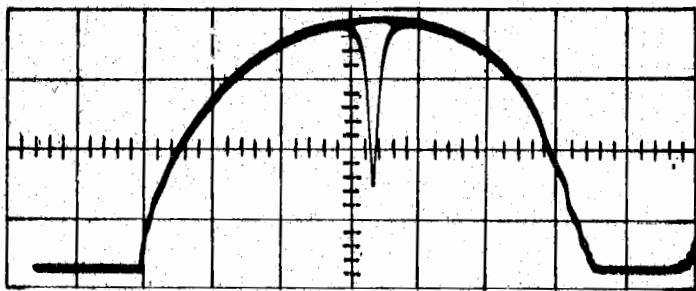


FIG. 9

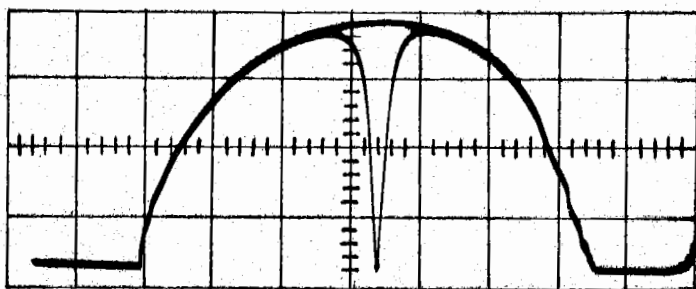


FIG. 10

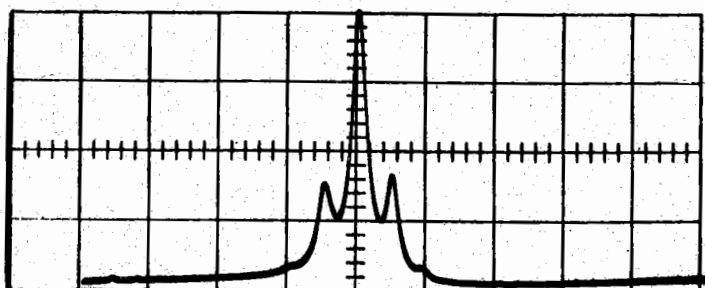


FIG. 11

Frequenza di modulazione 5 Mcps.

dati della tabella III, come elettrodo si è usato stagno vergine di purezza nominale maggiore del 99%.

T °K	Q _o	ΔQ _o	ΔQ _o %
~300	6400	200	3.1
77	13000	800	6.1
4.20	39000	2000	5.1
4.00	39000	2000	5.1
3.90	39000	2000	5.1
3.85	39000	2000	5.1
3.80	39000	2000	5.1
3.75	39000	2000	5.1
3.74	39000	2000	5.1
3.73	43200	1300	3.0
3.72	45700	1400	3.1
3.71	47700	1200	2.5
3.69	56500	2000	3.6
3.66	68400	2500	3.7
3.62	78000	4000	4.9
3.57	105000	6000	5.7
3.50	126000	9800	7.8
3.40	153000	10000	6.6
3.25	210000	23000	11.0
3.10	325000	37000	11.5
2.90	355000	46000	13.0
2.50	520000	80000	15.0
1.95	460000	55000	12.4
1.92	520000	80000	15.0
1.57	490000	35000	7.2

Tabella III

5. CONFRONTO CON LA TEORIA.

La teoria elettromagnetica^(*) dei risuonatori ci dice che la conducibilità finita σ_0 del materiale da luogo a due effetti: il primo è quello di assorbimento dell'onda elettromagnetica, il secondo è uno shift, $\Delta\omega^x$, della frequenza risonante. Il legame tra i due fenomeni e la distribuzione del campo elettromagnetico⁽¹⁶⁾ è espressa mediante la formula:

(*) - Tutti i calcoli sono eseguiti nel sistema di unità M. K. S. salvo indicazione contraria.

$$(16) \quad \frac{1}{Q_0} - 2j \frac{\Delta \omega^x}{\omega_0} = (R + jX) \frac{\lambda}{2\pi Z_0} \frac{\int_s H^2 ds}{\int_v H^2 dv}$$

ove s e v sono la superficie ed il volume della cavità, R ed X la parte reale ed immaginaria della impedenza superficiale del metallo e $Z_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2} = 377$ ohm.

Prendendo in considerazione la sola parte reale si ha:

$$(17) \quad Q_0 = \frac{\pi Z_0}{R} \frac{2}{\lambda} \frac{\int_v H^2 dv}{\int_s H^2 ds}$$

La grandezza $(2/\lambda) (\int_v H^2 dv / \int_s H^2 ds)$ è adimensionale ed inoltre non dipende dalla lunghezza d'onda; essa è una funzione della geometria del risuonatore e del modo di oscillazione e viene comunemente indicata con $f(l, m, n)$ (l, m, n , sono gli indici del modo di oscillazione).

Con ciò la (17) può essere scritta^(x):

$$(18) \quad Q_0 = \frac{\pi Z_0}{R} f(l, m, n)$$

La funzione $f(l, m, n)$ è graficata nella fig. 4. Nel nostro caso tenendo conto che $\nu = 23$ Gcps e che si opera nel modo TE_{011} si ottiene: $f(l, m, n) = 0.59$. Ciò ci permette di risalire dai dati del paragrafo precedente ai valori della resistenza superficiale. Le tabelle IV, V, VI e VII riportano i dati sperimentali da noi osservati relativi al rame commerciale, al rame elettrolitico, ed allo stagno nello stato normale e superconduttore rispettivamente.

Tabella IV

T °K	(R. 10^{+2})	(ΔR . 10^{+2})
293	4.8	0.1
180	4.1	0.2
77	3.2	0.1
4.2	2.9	0.1
2	2.9	0.1
1.2	2.9	0.1

Tabella V

T °K	(R. 10^{+2})	(ΔR . 10^{+2})
293	4.7	0.2
180	3.6	0.1
77	2.4	0.1
4.2	1.9	0.05
2.5	1.9	0.05
1.1	1.9	0.05

(x) - La (18) si può esprimere nella seguente forma:

$$Q_0 = \frac{\lambda}{\delta} f(l, m, n)$$

in cui compare lo skin depth $\delta = \lambda R / \pi Z_0$ e la lunghezza d'onda risuonante λ .

T °K	(R · 10 ²) Ω	(ΔR · 10 ²) Ω
300	11.0	0.8
77	5.4	0.3
4.2	1.79	0.10
4	1.79	0.10
3.85	1.79	0.10
3.80	1.79	0.10
3.74	1.79	0.10

Tabella VI

T °K	R _s /R _n	ΔR _s /R _n %
4.20	1	
4	1	
3.90	1	
3.85	1	
3.80	1	
3.75	1	
3.74	1	
3.73	0.903 ± 0.073	8.0
3.72	0.853 ± 0.070	8.2
3.71	0.818 ± 0.020	7.6
3.69	0.690 ± 0.060	8.7
3.66	0.570 ± 0.050	8.8
3.62	0.500 ± 0.050	10
3.57	0.370 ± 0.040	10.8
3.50	0.320 ± 0.040	12.9
3.40	0.255 ± 0.030	11.7
3.25	0.185 ± 0.030	16.2
3.10	0.120 ± 0.020	16.6
2.90	0.110 ± 0.020	18.2
2.50	0.075 ± 0.016	20
1.95	0.085 ± 0.015	17.5
1.92	0.075 ± 0.015	20
1.57	0.080 ± 0.010	12.5

Tabella VII

Analizziamo, ora, questi dati sperimentali alla luce della teoria elettromagnetica.

La impedenza superficiale di un conduttore, con riferimento alla fig. 12, è definita nel seguente modo:

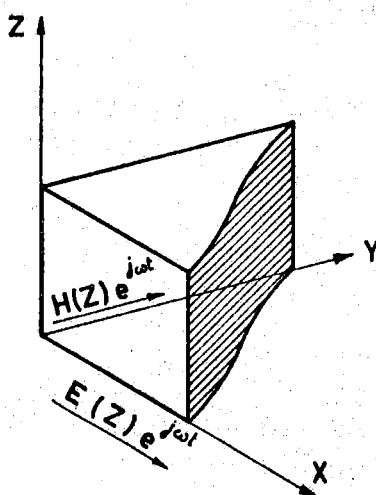


FIG. 12

$$(19) \quad Z = \frac{E_x(0)}{\int_0^{\infty} J_x(z) dz}$$

e tenendo conto delle equazioni di Maxwell:

$$(20) \quad Z = -c\omega\mu \left[\frac{E_x}{\partial E_x / \partial x} \right]_{Z=0} = \left[\frac{E_x}{H_y} \right]_{Z=0}$$

Supponendo valida la legge di Ohm $J = \sigma_0 E$ e utilizzando la precedente definizione si trae infine:

$$(21) \quad Z = \left(\frac{\omega\mu}{2\sigma_0} \right)^{1/2} (1 + j)$$

conseguentemente il campo elettrico all'interno del metallo decresce esponenzialmente e si riduce ad $1/e$ del suo valore originario ad una profondità δ , (skin depth):

questa nuova grandezza è legata alla resistenza superficiale dalla relazione:

$$(22) \quad \mathcal{J} = \frac{\lambda}{\pi Z_0} R$$

La (21) ci dà la resistenza superficiale in funzione della conducibilità σ_0 del metallo, ma è stato mostrato che a basse temperature ed alta frequenza il valore sperimentale è sempre maggiore di quello calcolato. Questo comportamento anomalo^(17, 18) si spiega ammettendo la non validità della legge di Ohm nella forma classica. Quando un'onda elettromagnetica penetra in un metallo, oltre che essere assorbita, subisce una variazione di lunghezza d'onda; il termine immaginario della (21) è responsabile di ciò e si ha λ (nel metallo) $\cong 2 \pi \delta$.

A temperatura ambiente il cammino libero medio "l" degli elettroni di conduzione è molto più piccolo di δ , per cui tra un urto e l'altro essi non sentono le variazioni in ampiezza e fase del campo elettrico dell'onda e quindi vale una legge puntuale tra corrente e campo. Quando la temperatura decresce l aumenta e δ diminuisce finchè $l \cong \delta$, non solo, ma a temperature più basse $l > \delta$.

In queste condizioni la legge di Ohm assume un aspetto integrale alquanto complicato ed il calcolo dell'impedenza superficiale presenta non poche difficoltà analitiche. Comunque con queste considerazioni (skin dept anomalo) si ricava che l'impedenza superficiale per $T \rightarrow 0$ tende ad un valore limite pari a:

$$(23) \quad Z_\infty = R_\infty (1 + j \sqrt{3})$$

con

$$(24) \quad R_\infty = \left(\frac{\sqrt{3} \pi}{c^4} \right)^{1/3} \omega^{2/3} \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^{1/3} \text{ unità Gauss}$$

Il rapporto $(1/\sigma_0)$ dipende esclusivamente dal metallo e nella tabella seguente ne sono dati alcuni valori⁽¹⁷⁾.

unità Gauss	Cu	Ag	Au	Sn	Hg	Al
$(\sigma_0/1) \times 10^{-22}$	13.9	8.3	7.6	8.6	3.3	5.5

Pippard suggerisce un argomento qualitativo^(19, 20) che permette di comprendere questa anomalia. Siccome alle basse temperature il cammino libero medio è molto aumentato, mentre lo skin dept_l è diminuito, solo gli elettroni che si muovono parallelamente alla superficie o facenti con essa un piccolo angolo sono influenzati dal campo applicato; quindi il numero di elettroni che partecipano al processo di conduzione è diminuito rispetto al valore normale, e la resistenza superficiale aumenta.

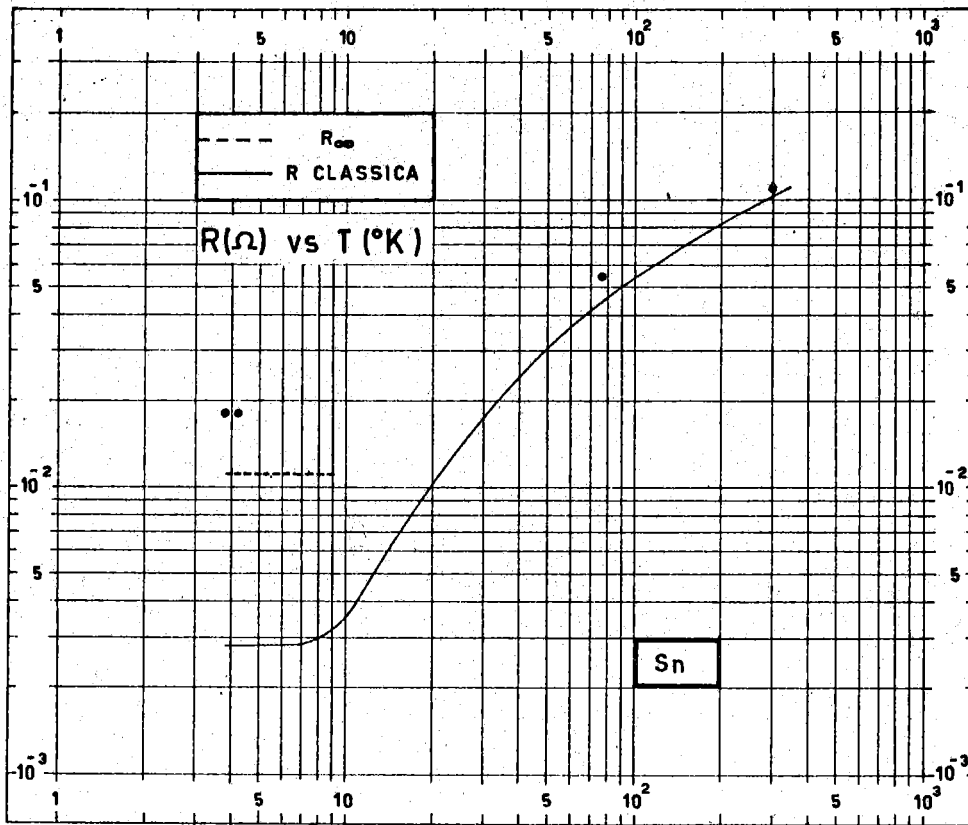


FIG. 13

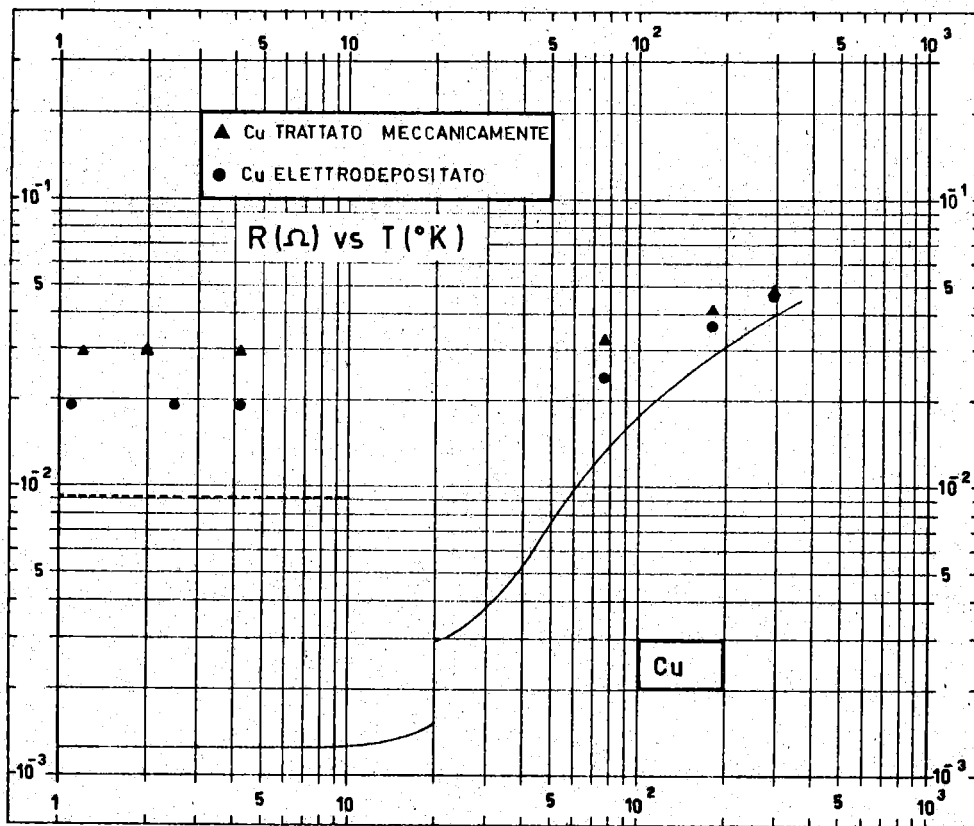


FIG. 14

Nelle figg. 13 e 14 sono riportate le curve (a tratto pieno) della resistenza superficiale, R , dello Stagno e del Rame calcolate mediante la formula (21) basandoci sui dati sperimentali di σ_0 tratti da "A compendium of the properties of materials at low temperatures (Phase III)". N. B. S. - Technical report 60-56. Dicembre 1961. Le curve tratteggiate danno il limite anomalo della resistenza calcolata mediante la (24) con i valori della bibliografia (17).

Tutte le curve sono state calcolate per la frequenza di 23 Gcps.

Nel caso del rame è evidente come il trattamento delle superfici abbia una profonda influenza sulle sue proprietà elettroniche. Il disaccordo tra i dati sperimentali per il rame elettrolitico ed il limite anomalo teorico può essere imputato ad una cattiva elettrodeposizione, come si è detto già nel paragrafo precedente. Per lo stagno è abbastanza soddisfacente. Infatti la lieve discrepanza a basse temperature è senza dubbio dovuta alla presenza di impurità.

Consideriamo, ora, la resistenza superficiale nello stato superconduttore. In fig. 15 sono riportati i risultati sperimentali contenuti nella tabella VII.

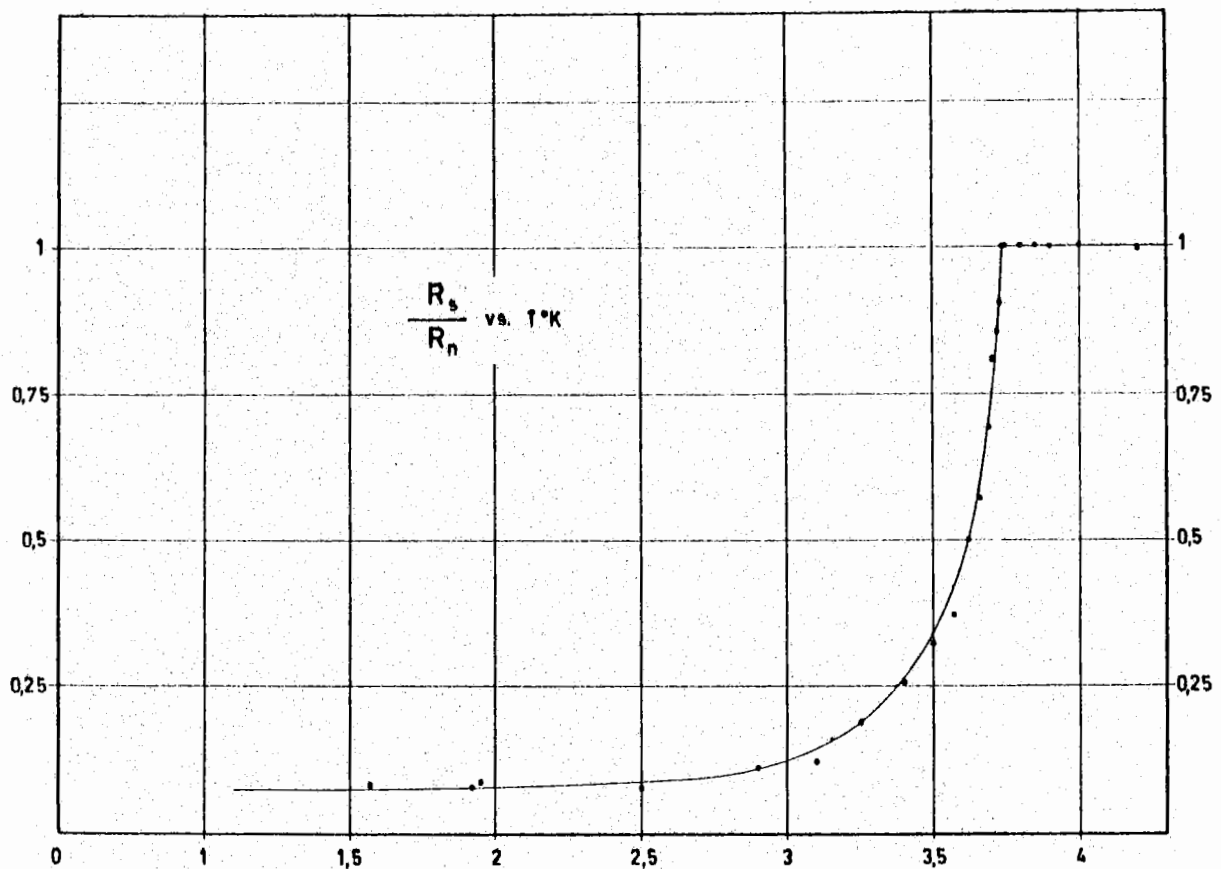


FIG. 15

La dipendenza della resistenza dalla temperatura e dalla frequenza ha un andamento che può essere spiegato almeno qualitativamente facendo ricorso al modello dei due fluidi. Esso suppone che l'insieme degli elettroni di conduzione, in un superconduttore, sia costituito da:

- a) un fluido di elettroni-s che non sperimentano alcun attrito nel loro moto, e con entropia nulla;
- b) un fluido di elettroni-n che si comportano come gli elettroni nei metalli normali.

Il rapporto degli elettroni-s a quello degli elettroni-n, e quindi delle rispettive correnti, dipende dalla temperatura secondo la legge⁽¹⁹⁾:

$$(25) \quad \frac{i_s}{i_n} \propto (1-t^4) \frac{1}{t^4}$$

ove $t = T/T_c$ è la temperatura normalizzata a quella di transizione T_c . Inoltre il rapporto i_s/i_n è influenzato anche dalla frequenza del campo elettromagnetico; infatti in questo caso si hanno due effetti di penetrazione (skin depth): quello, λ , dovuto alla corrente superconduttrice, e δ alla corrente normale. La teoria di London⁽²¹⁾ stabilisce che:

$$(26) \quad \frac{i_s}{i_n} \propto \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2$$

Supponendo di lavorare in corrente continua dalla (25) si ricava che, abbassando la temperatura, $i_s/i_n \rightarrow \infty$, cioè $i_n \rightarrow 0$; questo significa che la resistività del materiale tende ad annullarsi. Fissando, ora, la temperatura aumentiamo la frequenza del campo elettromagnetico partendo dal suo valore iniziale nullo; poichè $\delta \propto \omega^{-1/2}$, per $\omega \rightarrow \infty$ si ha dalla (26) $i_s/i_n \rightarrow 0$, cioè $i_s \rightarrow 0$ e quindi la resistività si riduce a quella normale. Ad una data frequenza, invece, abbassando la temperatura i due effetti si compensano in modo tale da raggiungere un valore finito di resistenza superficiale minore di quella normale. Pippard dà la seguente relazione empirica⁽²⁰⁾ per la resistenza superficiale nello stato superconduttore:

$$(27) \quad R_s = R_n A(\nu) \frac{t^4(1-t^2)}{(1-t^2)^2} \equiv R_n A(\nu) \phi(t)$$

in cui R_n è la resistenza normale immediatamente prima della transizione. La funzione $A(\nu)$ dipende esclusivamente dalla frequenza e dallo stato superficiale del materiale (lavorazione meccanica, impurezze, etc.).

La validità della (27) è ristretta al seguente intervallo⁽²²⁾ di temperatura e frequenza:

$$0.4 \lesssim t \lesssim 0.7$$

$$10^{-2} K T_c \lesssim h\nu \lesssim 2 K T_c$$

poichè $T_c = 3.74^\circ\text{K}$ per lo stagno le nostre misure rientrano nei precedenti limiti ($1.5^\circ\text{K} < T < 2.6^\circ\text{K}$, $800 \text{ Mcps} < \nu < 160.000 \text{ Mcps}$). Dalle misure eseguite è stato possibile ricavare il valore di $A(\nu)$ e della resistenza residua R_0 , che risultano $A(\nu) = 0.11 \pm 0.03$ e $R_0 = (1.34 \pm 0.05) 10^{-3} \Omega$. Il punto sperimentale di $A(\nu)$ è stato riportato nella fig. 16, in cui compaiono altri punti ottenuti da vari autori sullo stagno. Le due curve ivi tracciate corrispondono a due diverse approssimazioni teoriche^(22, 23).

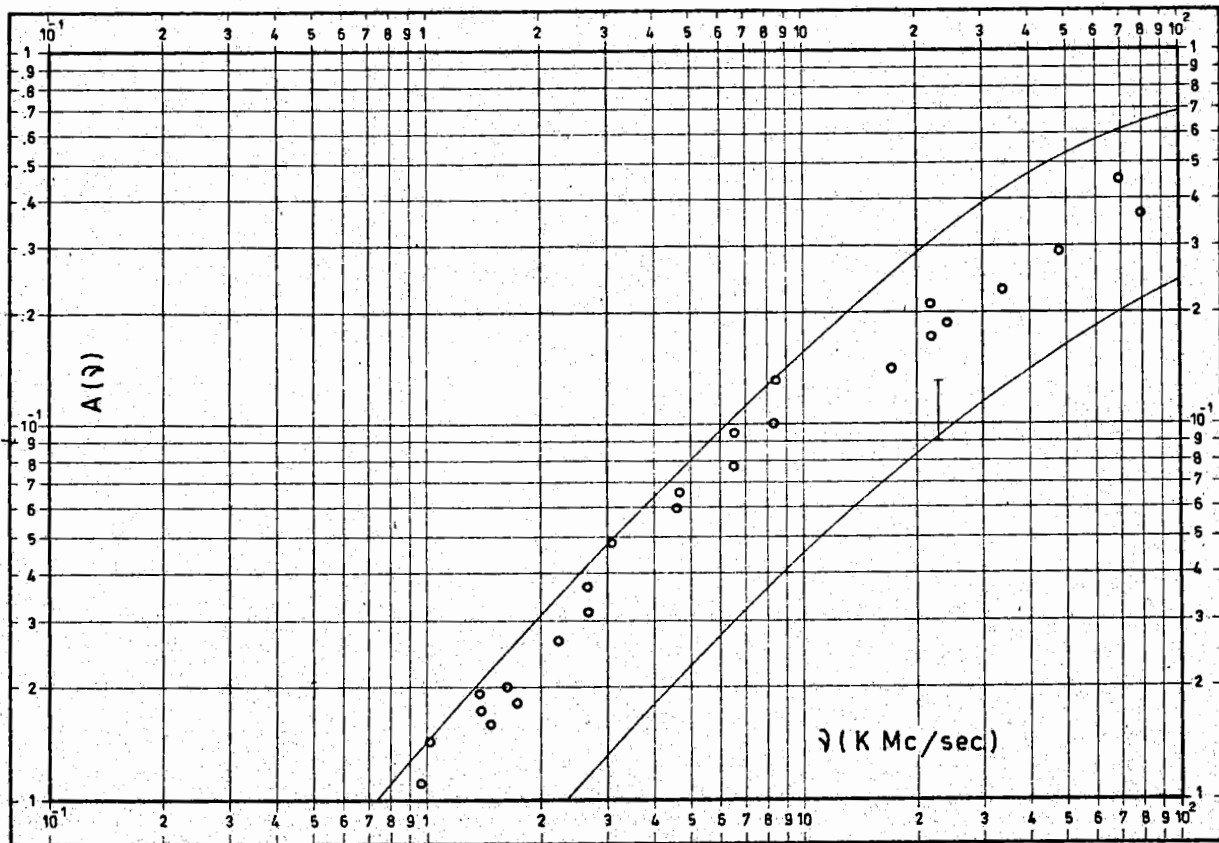


FIG. 16

La inferiore si ottiene se il cammino libero medio degli elettroni è maggiore dello skin dept soltanto di qualche ordine di grandezza, ed è nota nella letteratura come l'approssimazione dell'estremo limite anomalo; la superiore è relativa ad un cammino libero medio infinito.

Dalla posizione del nostro punto si può dedurre la presenza di impurità nello stagno da noi usato. E' possibile ora dare l'andamento teorico del Q_0 , dalla (18), poichè nel nostro caso

$$f(1, m, n) = f(0, 1, 1) = 0.59 \quad \text{e} \quad R = R_s + R_0$$

si ottiene

$$(28) \quad Q_0 = \frac{698}{R_n A(\nu) \phi(t) + R_0}$$

Questa curva è graficata in fig. 17 in cui sono riportati i valori sperimentali; come si nota l'accordo è soddisfacente.

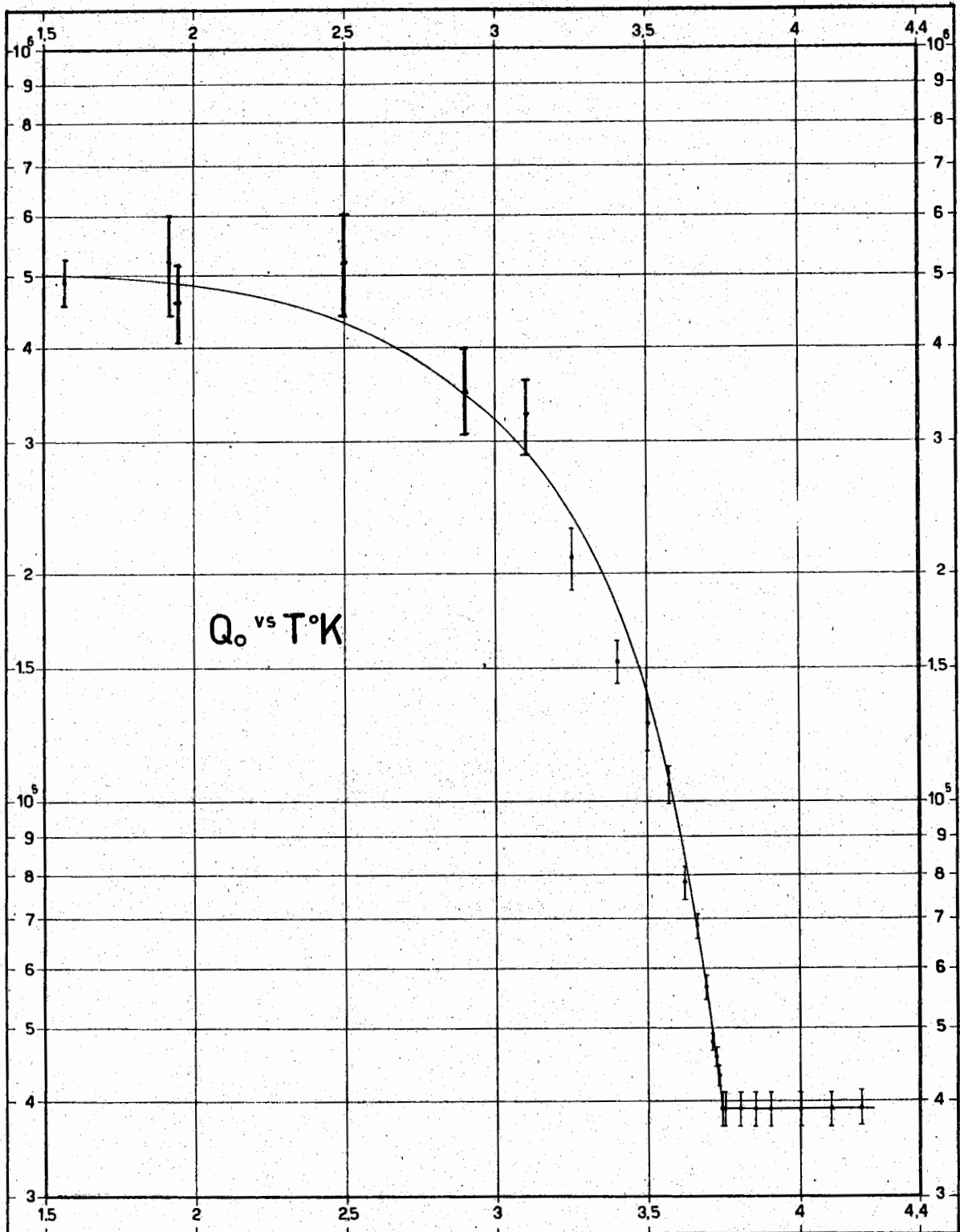


FIG. 17

CONCLUSIONI.

Lo scopo iniziale di questo lavoro fu quello di mettere a punto una parte della tecnica occorrente a studiare la doppia risonanza. Però durante lo studio fatto ci siamo accorti che un nuovo campo di misure si imponeva alla nostra attenzione: la misura della impedenza superficiale nei superconduttori alle alte frequenze. In questo settore, pochi sono i dati sperimentali specie per ciò che riguarda l'effetto delle impurità, il comportamento degli strati sottili di metalli non superconduttori depositati su superconduttori, ed altri problemi di carattere tecnico come il trattamento della superficie. Per ciò che riguarda l'applicazione pratica delle cavità superconduttrici si può dire che esse sono elementi estremamente stabili a temperature facilmente raggiungibili; si può pensare, per esempio, al loro uso come componenti di stabilizzatori di frequenza. Sfortunatamente non possono essere usati come elementi oscillanti nella rivelazione della risonanza paramagnetica. Una applicazione, che può portare ampi vantaggi pratici, è la loro utilizzazione come elementi acceleratori di particelle⁽²⁴⁾.

A questo riguardo una cavità di piombo con modo TE_{011} di diametro uguale alla lunghezza ed operante in banda S ha un Q_0 teorico pari a circa 10^{11} a 1.5°K; recentemente⁽²⁵⁾ alla stessa temperatura è stato ottenuto sperimentalmente un Q_0 dell'ordine di 10^{10} .

RINGRAZIAMENTI.

E' nostro gradito dovere ringraziare i Sigg. R. Bolli, E. Cima, I. Cenciarelli e I. Giabbai, i quali, oltre all'impegno con cui si sono prodigati nelle realizzazioni pratiche, ci hanno sostenuto con il loro entusiasmo.

Infine ringraziamo il Gruppo Microonde dell'Istituto di Fisica della Università di Pisa, in particolare il Prof. A. Gozzini per il suo incoraggiamento.

APPENDICE.

Con riferimento alla fig. 1 Q_L e Q_{ex} vengono scritti nel seguente modo:

$$(A1) \quad Q_L = \frac{\omega_o L}{R + \frac{R_1 Z_o}{R_1 + Z_o}}$$

$$(A2) \quad Q_{ex} = \frac{\omega_o L}{\frac{R_1 Z_o}{R_1 + Z_o}}$$

Tenendo conto che $Q_o = \omega_o L/R$ si ha dalla (A1):

$$(A3) \quad \frac{Q_o}{Q_L} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{Z_o}{R_1}} \frac{Z_o}{R}$$

Sostituendo Z , vedi nota 2, nell'espressione di Γ (11) e tenendo conto di (A3) e delle espressioni Γ_o (10) e Γ_1 (9) si ottiene:

$$(A4) \quad \Gamma = \frac{\Gamma_o + jQ_L \frac{\Delta \omega}{\omega_o} \Gamma_1}{1 + jQ_L \frac{\Delta \omega}{\omega_o}}$$

e chiamando $\alpha = (\Delta \omega / \omega_o) Q_L$ si ha:

$$(A5) \quad |\Gamma|^2 = \frac{|\Gamma_o|^2 + \alpha^2 |\Gamma_1|^2}{1 + \alpha^2}$$

e così si ricavano immediatamente le formule (12) del testo. Infine usando le espressioni di Γ_o e Γ_1 in funzione delle costanti del circuito si ottengono Q_o e Q_{ex} in funzione dei soli coefficienti di riflessione e del Q_L , ovvero le formule (13).

Come si nota si hanno due espressioni diverse nel segno e ciò è dovuto dall'espressione del Γ_o facendo tendere $R_1 \rightarrow \infty$ infatti

$$(A6) \quad \Gamma_o = \frac{\frac{R R_1}{R + R_1} - Z_o}{\frac{R R_1}{R + R_1} + Z_o} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{Z_o}{R}}{1 + \frac{Z_o}{R}} \equiv \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

Perciò se

$$(A7) \quad \begin{array}{l} \beta > 1 \quad , \quad \Gamma_o < 0 \\ \beta < 1 \quad , \quad \Gamma_o > 0 \end{array}$$

Quindi al fine di eliminare l'incertezza del segno si introducono i moduli e si usano i segni a seconda del valore di β .

Il coefficiente β è legato ad i fattori di merito Q_o e Q_{ex} in questo modo

$$(A8) \quad \frac{Q_o}{Q_{ex}} = \frac{\omega_o L/R}{\frac{\omega L}{R_1 Z_o} (R_1 + Z_o)} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \infty} \frac{Z_o}{R} \equiv \beta$$

inoltre dalle (13) e (14) facendo $\Gamma_1 \rightarrow 1$ (ovvero $R_1 \rightarrow \infty$, vedi (9)) si ricava:

$$(A9) \quad \begin{array}{l} \beta < 1 \quad \quad \quad \beta > 1 \\ \frac{Q_o}{Q_{ex}} = \frac{1 - |\Gamma_o|}{1 + |\Gamma_o|} \quad ; \quad = \frac{1 + |\Gamma_o|}{1 - |\Gamma_o|} \end{array}$$

confrontando con (A8):

$$(A10) \quad \beta = \begin{cases} \frac{1 - |\Gamma_o|}{1 + |\Gamma_o|} < 1 \quad , \quad (\text{u. c.}) \\ \frac{1 + |\Gamma_o|}{1 - |\Gamma_o|} > 1 \quad , \quad (\text{o. c.}) \end{cases}$$

Poichè β decide del tipo di accoppiamento tra la linea di trasmissione e la cavità, e quindi quali delle due formule (13) e (14) siano da usarsi, è necessario determinare il valore di β (se ≥ 1). A questo scopo riportiamo in carta di Smith il coefficiente $\beta = Z_o/R$. I cerchi rappresentano il luogo dei punti impedenza della cavità. Se $\beta > 1$ (o. c.) l'aggiunta di una tensione varia Γ_o , se poi la fase viene mutata da 0° a 180° alla risonanza il segnale di tensione diminuisce; mentre lontano dalla risonanza il segnale aumenta, come mostrata in fig. A1.

Nel caso $\beta < 1$ (u. c.), invece, il segnale di tensione aumenta sia alla risonanza che fuori risonanza variando la fase da 0° a 180° .

Le figg. A2 e A3 danno l'aspetto della rappresentazione oscillografica del segnale di tensione in funzione della frequenza.

A questo punto è utile vedere come il coefficiente di accoppiamento β influisca la risposta dello spettrometro con il circuito oscillante in ri-

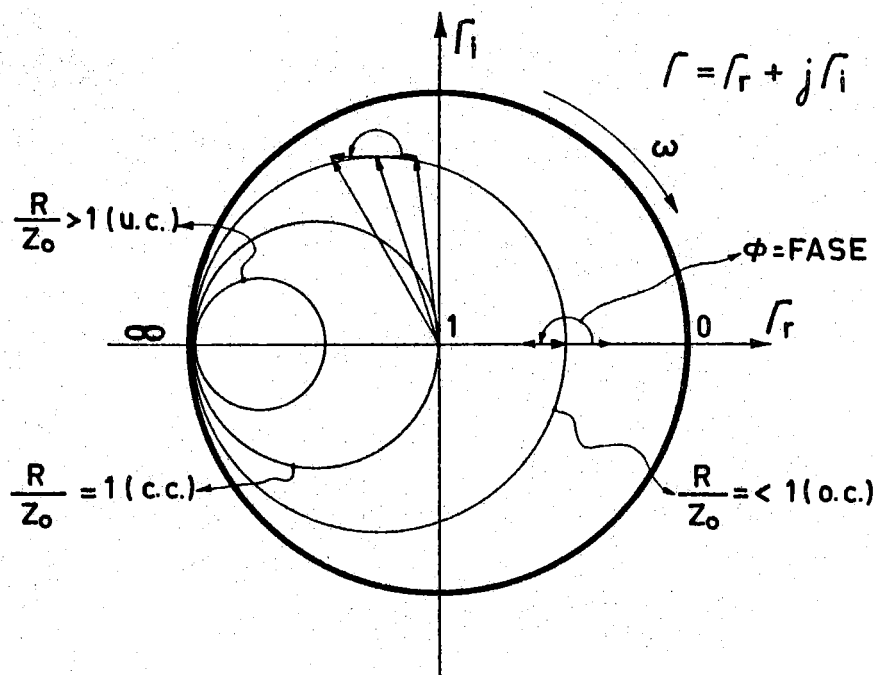


FIG. A1

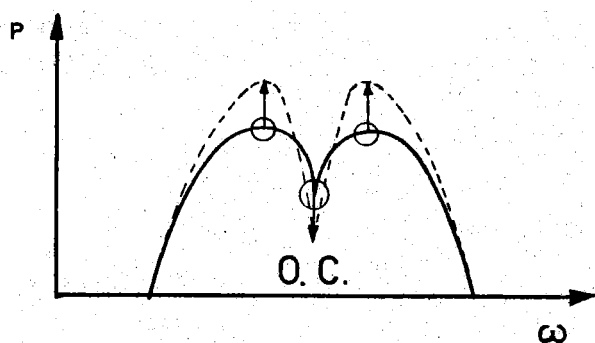


FIG. A2

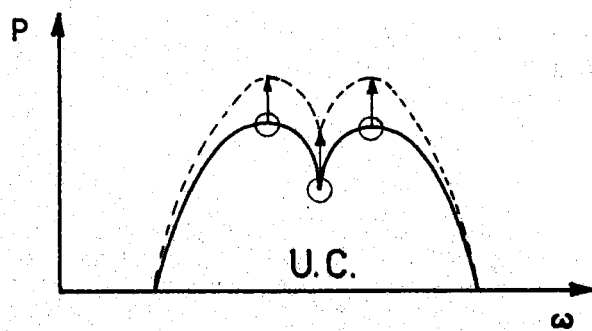


FIG. A3

flessione. Il coefficiente di riflessione Γ_o della cavità è:

$$(A11) \quad \Gamma_o = \frac{Z - Z_o}{Z + Z_o} \equiv \frac{V_R}{V_o} \equiv \frac{\text{tensione riflessa}}{\text{tensione incidente}}$$

ove $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$. La suscettività del campione è:

$$(A12) \quad \chi(\nu) = \chi' - j\chi''$$

e $\mu = 1 + 4\pi\chi(\nu)$ è la permeabilità magnetica che dà luogo ad una variazione nella impedenza della cavità, che diviene:

$$(A13) \quad Z_c = R + 4\pi\eta\omega L\chi'' + j \left[\omega L + 4\pi\eta\omega L\chi' - \frac{1}{\omega c} \right]$$

Si ha, perciò, una variazione nella parte reale e nella parte immaginaria della impedenza:

$$(A14) \quad (dZ_c)_{\text{reale}} = 4\pi\eta\omega L\chi''$$

$$(A15) \quad (dZ_c)_{\text{img}} = 4\pi\eta\omega L\chi'$$

ma

$$(A16) \quad dQ_0 = -\frac{Q_0}{R} dR = -4\pi\eta Q_0^2 \chi''$$

$$(A17) \quad d\omega = -\frac{\omega}{2L} dL = -4\pi\eta\omega^2 \chi'$$

Ne viene che la variazione nella tensione riflessa dalla cavità, alla risonanza è:

$$(A18) \quad \Delta V_R = \pm \frac{\beta}{(1+\beta)^2} 8\pi\eta Q_0 \chi'' V_0$$

Il segno superiore vale per $\beta < 1$ quello inferiore per $\beta > 1$, il massimo segnale si ottiene vicino all'accoppiamento critico, cioè $\beta = 1$. (V. fig. A4).

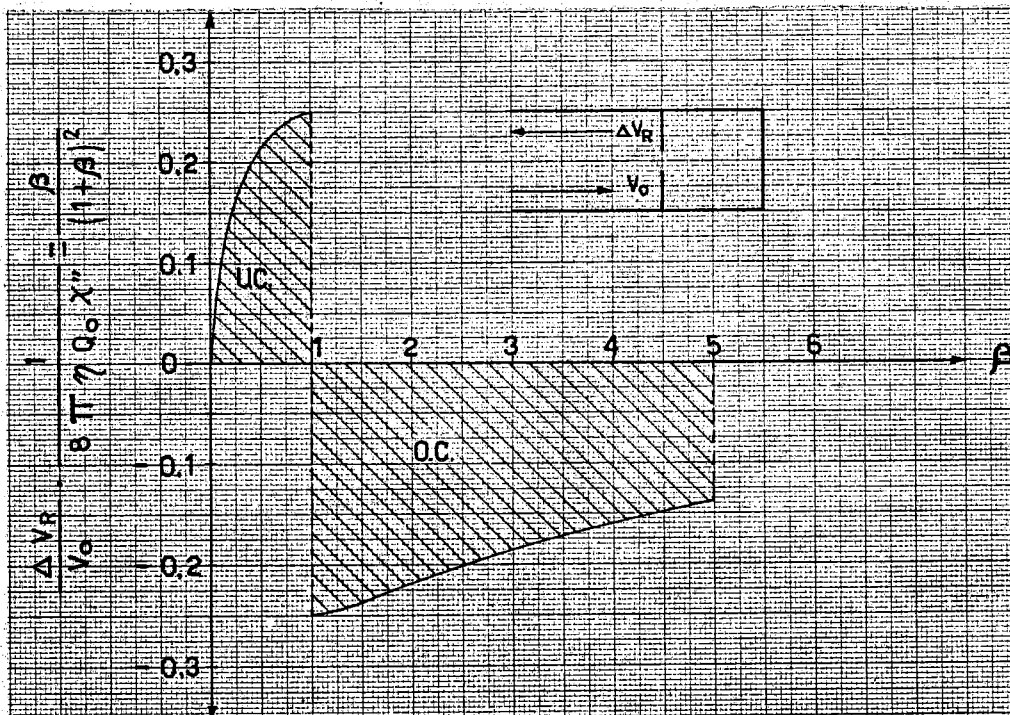


FIG. A4

Da questo risulta che non si deve lavorare troppo vicino alla condizione $\sqrt{\omega_0} = 0$ poichè si può avere l'inversione del segnale durante lo spazzolamento della riga di risonanza. Questo fatto provoca una perdita in sensibilità nella rivelazione del segnale di risonanza poichè la (2) è ottenuta per $\beta = 1$.

BIBLIOGRAFIA.

- (1) - Abragam, Principles Nuclear Magnetism, (Oxford, 1961).
- (2) - Shimoda, Proc. Int. School of Physics "E. Fermi" XVII Course, Topics on Radiofrequency Spectroscopy, (Acc. Press, London, 1960).
- (3) - Maxwell et al., Phys. Rev. 76, 1332 (1949).
- (4) - Grebenkemper et al., Phys. Rev. 86, 673 (1952).
- (5) - Lomot, Guide d'onda, trad. (Giuntini, Firenze, 1955).
- (6) - Atwater, Intr. to microwave, (McGraw-Hill, New York, 1962).
- (7) - Ginzton, Microwave measurements, (McGraw-Hill, New York, 1957).
- (8) - Brown et al., J. Appl. Phys. 23, 711 (1952).
- (9) - Montgomery, Technique of microwave measurements, (McGraw-Hill, New York).
- (10) - Moreno, Microwave transmission data, (Dover, New York, 1958).
- (11) - Wilson et al., Bell Syst. Tecn. J., 25, 408 (1946).
- (12) - Brickwedde, Physica XXIV, S 128 (1958).
- (13) - Strub, J. de Physique, 20, 42 (1959).
- (14) - Yariv, et al., Rev. Sci. Instr., 30, 684 (1959).
- (15) - Black, Modulation Theory, (Van Nostrand, New York, 1953).
- (16) - Slater, Rev. Mod. Phys., 441, 18 (1946).
- (17) - Sondheimer, Adv. in Phys., 1 (1952).
- (18) - Reuter et al., Proc. Roy. Soc., A 195, 336 (1948).
- (19) - Rosenberg, Low Temp. Solid State Phys., (Oxford, 1963).
- (20) - Pippard, Adv. in Electr. and Electron Phys., 6, (1954).
- (21) - London, Superfluids, (Wiley, New York, 1954).
- (22) - Miller, Phys. Rev., 118, 928 (1960).
- (23) - Waldram, Rev. Mod. Phys., 36, 187 (1964).
- (24) - Bounin, Seminario interno Frascati (1964).
- (25) - Schwettman, Cryo. Eng. Conf., Phyladelphia, Penn., (1964).